

ROUMANIE

Lycée Louis-le-Grand, test pour l'entrée en classe préparatoire
MPSI, session 2008.

Durée du test : 4 heures

Les exercices ci-dessous peuvent être abordés dans un ordre quelconque. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 Déterminer le plus petit réel a tel que, pour tout $n \geq 1$, on ait $n! \leq an^{n+1}e^{-n}$.

Solution

Il est naturel d'étudier la monotonie de la suite u définie par $u_n := \frac{n!}{n^{n+1}e^{-n}}$ et donc d'étudier le quotient

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)e \frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} = e \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = e \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 &\Leftrightarrow e \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \leq 1 \Leftrightarrow 1 + (n+1) \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \leq -\frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Or l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ est réalisée pour tout $x > -1$. Cela provient par exemple de l'étude de la fonction f définie par $f(x) := x - \ln(1+x)$. En effet, $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$ s'annule en $x = 0$, est négative avant et positive après, ce qui fait que le minimum de f est réalisé en $x = 0$ et vaut donc 0.

Ainsi, la suite u décroît. Par conséquent, la plus petite valeur de a n'est autre que $u_1 = e$.

Exercice 2 Soit a et b deux réels strictement positifs.

- a. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$.
- b. Montrer la même inégalité lorsque $n \in \mathbb{Z}$.

Solution

a. Posons $x = \frac{a}{b}$. L'inégalité à démontrer devient

$$(1+x)^n + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

Par la formule du binôme,

$$(1+x)^n + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right).$$

Mais $x^k + \frac{1}{x^k} \geq 2$ d'après l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique. Donc

$$(1+x)^n + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \geq 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^{n+1}.$$

b. Il n'est pas restrictif, avec les notations précédentes, de supposer que $x \geq 1$. L'inégalité à démontrer devient, en posant $p = -n$,

$$\frac{1}{(1+x)^p} + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^p} \geq 2^{-p+1},$$

soit encore

$$2^{p-1}(x^p + 1) \geq (1+x)^p.$$

Introduisons la fonction f définie par $f(x) := 2^{p-1}(x^p + 1) - (1+x)^p$. Alors

$$f'(x) = p((2x)^{p-1} - (1+x)^{p-1}) \geq 0$$

car $x \geq 1$. Ainsi, f croît. Comme $f(1) = 0$, on a bien $f(x) \geq 0$.

Exercice 3 On pose $\alpha = (200)^{\frac{1}{6}}$. Déterminer des rationnels a_0, \dots, a_5 tels que

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt[3]{5}} = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_5\alpha^5.$$

Solution

Posons $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt[3]{5}$. Comme $200 = 2^3 \times 5^2$, on a que

$$c := \sqrt[6]{200} = ab.$$

Il s'agit d'exprimer $\frac{1}{a+b}$ en fonction des puissances de c . Cherchons *a priori* une expression de $\frac{1}{a+b}$ sous la forme

$$\frac{1}{a+b} = u_0 + u_1c + u_2c^2 + u_3c^3 + u_4c^4 + u_5c^5.$$

Cette égalité équivaut à

$$(u_0 + u_1c + u_2c^2 + u_3c^3 + u_4c^4 + u_5c^5)(a + b) = 1.$$

Pour la développer, on tient compte de relation telles que $ac = a^2b = 2b$. De façon générale, dès qu'une expression prend une valeur entière, on la lui attribue.

Il vient

$$u_0 + u_1c + u_2c^2 + u_3c^3 + u_4c^4 + u_5c^5 = u_0 + u_1ab + 2u_2b^2 + 10u_3a + 20u_4b + 20u_5ab^2.$$

Puis

$$\begin{aligned} 1 &= (u_0 + u_1ab + 2u_2b^2 + 10u_3a + 20u_4b + 20u_5ab^2)(a + b) \\ &= u_0a + 2u_1b + 2u_2ab^2 + 20u_3 + 20u_4ab + 40u_5b^2 \\ &+ u_0b + u_1ab^2 + 10u_2 + 10u_3ab + 20u_4b^2 + 100u_5a. \end{aligned}$$

Pour que cette égalité soit réalisée, il suffit que l'on ait

$$20u_3 + 10u_2 = 1 ; u_0 + 100u_5 = 0 ; 20u_4 + 10u_3 = 0 ;$$

$$2u_2 + u_1 = 0 ; 40u_5 + 20u_4 = 0 ; 2u_1 + u_0 = 0.$$

Ce système linéaire se résout sans grande difficulté. On obtient

$$u_0 = -10/17 ; u_1 = 5/17 ; u_2 = 5/34 ; u_3 = -2/85 ; u_4 = 1/85 ; u_5 = -1/170.$$

Cela fournit l'expression demandée.

Exercice 4 a. Déterminer une primitive de $\frac{1}{\cos t}$ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On utilisera pour cela la fonction Arctan, fonction réciproque de la fonction tan qui réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur \mathbb{R} .

b. Déterminer une fonction f deux fois dérivable sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$ et telle que, pour tout réel t , $f''(t) + \sin(f(t)) = 0$.

Solution

a. La fonction $f := \text{Arctan}$, définie par l'énoncé, satisfait $(f \circ g)(t) = t$, lorsque $g := \tan$. Donc, par dérivation,

$$(f' \circ g)(t)g'(t) = 1,$$

soit $f'(g(t)) = \frac{1}{1+g(t)^2}$. Lorsque $x \in \mathbb{R}$, il existe $t \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $x = g(t)$. Ainsi, pour tout x réel,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

À présent, on peut écrire, grâce au changement de variable $x = 2 \operatorname{Arctan} v$, équivalent à $v = \tan \frac{x}{2}$,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2dv}{1+v^2} \frac{1+v^2}{1-v^2} = \int \frac{2dv}{1-v^2} = \ln \frac{1+v}{1-v} = \ln \frac{1+\tan \frac{x}{2}}{1-\tan \frac{x}{2}}.$$

b. Limitons-nous à la recherche d'une fonction f telle que f' ne s'annule. L'égalité donnée équivaut à

$$2f'(t)f''(t) + 2f'(t)\sin f(t) = 0,$$

donc

$$f'^2(t) - 2\cos f(t) = C$$

avec $C = 2$ compte tenu des valeurs en 0. Donc

$$f'^2(t) = 2(1 + \cos f(t)) = 4\cos^2 \frac{f(t)}{2},$$

ou $f'(t) = 2\cos \frac{f(t)}{2}$ puisque f' ne s'annule pas, donc $\cos \frac{f}{2}$ ne s'annule pas, ce qui entraîne que ces fonctions sont positives sur \mathbb{R} puisqu'elles prennent en 0 des valeurs positives. Si l'on pose $y = f(t)/2$, on obtient donc

$$\frac{y'}{\cos y} = 1,$$

donc $\ln \frac{1+\tan \frac{y}{2}}{1-\tan \frac{y}{2}} = t + D$, avec $D = 0$ compte tenu de la valeur en 0. Finalement,

$$\frac{1 + \tan \frac{y}{2}}{1 - \tan \frac{y}{2}} = e^t,$$

soit

$$\tan \frac{y}{2} = \frac{e^t - 1}{e^t + 1},$$

ou

$$f(t) = 2y = 4 \operatorname{Arctan} \frac{e^t - 1}{e^t + 1}.$$

Exercice 5 Soit a un réel. Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} et telles que de plus, pour tout réel t , $f'(t) = f(a - t)$.

Solution

Nécessairement, f' est dérivable et

$$f''(t) = -f'(a - t) = -f(t).$$

Donc

$$f(t) = A \cos t + B \sin t.$$

La condition devient

$$-A \sin t + B \cos t = A \cos a \cos t + A \sin a \sin t + B \sin a \cos t - B \cos a \sin t,$$

soit

$$(B - A \cos a - B \sin a) \cos t + (B \cos a - A - A \sin a) \sin t = 0.$$

En évaluant cette égalité en 0, puis en $\frac{\pi}{2}$, on obtient que

$$B - A \cos a - B \sin a = B \cos a - A - A \sin a = 0.$$

- Lorsque $\cos a = 0$ et $\sin a = 1$, on obtient que $f(t) = B \sin t$, qui convient effectivement (avec $a = \frac{\pi}{2}$).
- Lorsque $\cos a = 0$ et $\sin a = -1$, on obtient que $f(t) = A \cos t$, qui convient effectivement (avec $a = -\frac{\pi}{2}$).
- Lorsque $\cos a \neq 0$, on obtient que $A = B = 0$, donc que $f = 0$.

Exercice 6 Soit M_1, M_2, M_3 et M_4 des points non alignés du plan affine euclidien. Montrer que ces points sont cocycliques si et seulement si existent quatre réels a_1, a_2, a_3 et a_4 non tous nuls tels que, pour tout M ,

$$\sum_{i=1}^4 a_i M M_i^2 = 0.$$

Solution

- Supposons d'abord la relation vérifiée. Pour tout O ,

$$0 = \sum_{i=1}^4 a_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM_i})^2 = \left(\sum_{i=1}^4 a_i\right) MO^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^4 a_i \overrightarrow{OM_i}\right) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^4 a_i OM_i^2,$$

donc

$$\sum_{i=1}^4 a_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM_i})^2 = \left(\sum_{i=1}^4 a_i\right) MO^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^4 a_i \overrightarrow{OM_i}\right) \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{0}.$$

Il en résulte que $\sum_{i=1}^4 a_i = 0$ et que $\sum_{i=1}^4 a_i \overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{0}$

Soit O le centre et R le rayon du cercle circonscrit au triangle $M_1M_2M_3$. On obtient que

$$0 = \sum_{i=1}^4 a_i OM_i^2 = (a_1 + a_2 + a_3)R^2 + a_4 OM_4^2 = a_4(OM_4^2 - R^2).$$

Par conséquent, le point M_4 est sur le cercle et les quatre points sont cocycliques.

• Supposons à présent les quatre points cocycliques. On note (x_i, y_i) les coordonnées de M_i dans un repère affine du plan. Comme les points M_i ne sont pas alignés, trois d'entre eux ne sont pas alignés, par exemple les trois premiers. Soit $u_i = (x_i, y_i, 1) \in \mathbb{R}^3$. Les trois vecteurs u_1, u_2 et u_3 , qui sont situés dans le plan d'équation $z = 1$, forment alors une base de \mathbb{R}^3 , ce qui permet d'écrire

$$u_4 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3.$$

Posons $a_4 = -1$. La relation s'écrit plus symétriquement $\sum_{i=1}^4 a_i u_i = 0$ et entraîne que $\sum_{i=1}^4 a_i = 0$ et que

$$\sum_{i=1}^4 a_i \overrightarrow{MM_i} = 0$$

pour tout point M . Pour tout point O ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 MM_i^2 &= \sum_{i=1}^4 a_i (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM_i})^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^4 a_i\right) MO^2 + 2\left(\sum_{i=1}^4 a_i \overrightarrow{OM_i}\right) \overrightarrow{MO} + \sum_{i=1}^4 a_i OM_i^2 = \sum_{i=1}^4 a_i OM_i^2. \end{aligned}$$

Autrement dit, $M \mapsto \sum_{i=1}^4 MM_i^2$ est constante. Évaluons cette fonction en le centre O du cercle circonscrit, de rayon R , à $M_1M_2M_3M_4$. Il vient

$$\sum_{i=1}^4 a_i OM_i^2 = \sum_{i=1}^4 a_i R^2 = 0$$

ce qui achève la démonstration.

Exercice 7 a. On admet que π est un nombre irrationnel. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{|\sin n|}\right)_{n \geq 1}$ est bien définie.

b. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{|\sin n|}\right)$ ne tend pas vers $+\infty$.

Solution

a. Montrons que $\sin n \neq 0$ lorsque $n \geq 1$. Dans le cas contraire, il existe k entier tel que $n = k\pi$, ce qui entraîne que π est rationnel et une contradiction.

b. Supposons par l'absurde que la suite $\left(\frac{1}{|\sin n|}\right)$ tend vers $+\infty$. Alors la suite $(\sin n)$ tend vers 0. Donc $\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \cos n \cos 1 \rightarrow 0$. mais $\cos 1 \neq 0$ car $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$. Donc $\cos n \rightarrow 0$, ce qui conduit à la contradiction que $\sin^2 n + \cos^2 n \rightarrow 0$.

Exercice 8 Soit d un entier supérieur ou égal à 1 et $P(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_0$ un polynôme à coefficients complexes.

a. Soit r un réel strictement positif tel que $r^d \geq |a_{d-1}|r^{d-1} + \dots + |a_0|$. Montrer que toute racine complexe z de P vérifie $|z| \leq r$.

b. Montrer que toute racine complexe z de P vérifie $|z| \leq \max_{1 \leq k \leq d} (d|a_{d-k}|)^{\frac{1}{k}}$.

Solution

a. Soit z une racine non nulle de P . On a donc

$$z^d = -a_{d-1}z^{d-1} - \dots - a_0$$

et donc, par l'inégalité triangulaire et après division par $|z|^d$,

$$1 \leq \frac{|a_{d-1}|}{|z|} + \dots + \frac{|a_0|}{|z|^d}.$$

Introduisons la fonction φ définie sur $]0, +\infty[$ par $\varphi(x) := \frac{|a_{d-1}|}{x} + \dots + \frac{|a_0|}{x^d}$. Cette fonction est clairement décroissante et l'hypothèse entraîne que $\varphi(r) \leq 1$. D'autre part, $\varphi(|z|) \geq 1$. Donc $|z| \leq r$.

b. Montrons que $r := \max_{1 \leq k \leq d} (d|a_{d-k}|)^{\frac{1}{k}}$ satisfait l'hypothèse du **a**. Pour tout $k \in [1, d]$, on a que

$$d|a_{d-k}| \leq r^k.$$

Donc

$$|a_{d-1}|r^{d-1} + \dots + |a_0| = \sum_{k=1}^d |a_{d-k}|r^{d-k} \leq \sum_{k=1}^d \frac{1}{d} r^d = r^d.$$

Exercice 9 Soit E une ellipse de demi-axes a et b . Quelle est l'aire maximale d'un quadrilatère convexe inscrit dans cette ellipse ?

Solution

Commençons par traiter le cas du cercle de rayon 1 et montrons que les quadrilatères convexes inscrits dans ce cercle sont les carrés, qui ont tous la même aire, égale à 2. Remarquons qu'un losange inscrit dans un cercle est un carré. En effet, deux angles opposés sont à la fois supplémentaires et égaux, donc droits.

Soit maintenant un quadrilatère convexe $ABCD$ inscrit dans un cercle, qui ne soit pas un losange. On peut supposer que $AB > AC$, le sommet opposé à A étant D . Soit A' le milieu de l'arc d'extrémités B et C passant par A . L'aire du triangle $A'BC$ est manifestement supérieure strictement à celle de ABC , puisque la hauteur de ce triangle est strictement plus grande que celle du triangle. Donc l'aire du quadrilatère convexe $ABCD$ est strictement inférieure à celle du quadrilatère $A'BCD$. En recommençant le même procédé, on voit que l'aire de $ABCD$ est strictement inférieure à celle d'un losange $A'B'C'D'$, losange qui est un carré. Donc l'aire maximale d'un quadrilatère convexe inscrit dans le cercle unité est $2R^2$.

Dans le cas général d'une ellipse de demi-axes a et b , que l'on suppose être d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en repère orthonormé, on sait que l'application $(x, y) \mapsto (\frac{x}{a}, \frac{y}{b})$ envoie l'ellipse sur le cercle unité et un quadrilatère convexe sur un quadrilatère convexe. Elle envoie donc un quadrilatère convexe d'aire maximale inscrit dans l'ellipse sur un carré inscrit dans le cercle unité, carré d'aire 2. Or l'aire de l'image par f d'un quadrilatère du plan est égale à $\frac{1}{ab}$ l'aire de ce quadrilatère. Il ne résulte que l'aire maximale d'un quadrilatère inclus dans une ellipse est égale à $2ab$.

Exercice 10 Soit (u_n) et (v_n) deux suites complexes. On suppose que les suites $(u_n v_n^2)$ et $(u_n^2 - v_n^2)$ sont bornées. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.

Solution

Il existe une constante M telle que, pour tout n ,

$$|u_n v_n^2| \leq M^3 \text{ et } |u_n^2 - v_n^2| \leq M^2.$$

La première inégalité implique l'une au moins des deux majorations $|u_n| \leq M$, $|v_n^2| \leq M^2$ (dans le cas contraire, on aurait que $|u_n v_n^2| > M^3$). Dans le premier cas, la seconde inégalité implique que $|v_n^2| \leq 2M^2$, soit $|v_n| \leq M\sqrt{2}$ et, dans le second, que $|u_n^2| \leq 2M^2$. Dans tous les cas, (u_n) et (v_n) sont bornées par $M\sqrt{2}$.